ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ TRANG

HÀM CỰC TRỊ SICIAK CỦA HÌNH CẦU PHỨC VÀ ỨNG DỤNG VÀO XẤP XỈ ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ TRANG

HÀM CỰC TRỊ SICIAK CỦA HÌNH CẦU PHỨC VÀ ỨNG DỤNG VÀO XẤP XỈ ĐA THỨC

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu

Thái Nguyên, năm 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu. Các tài liệu trong luận văn là trung thực.

Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Dương Thị Trang

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS.TSKH. Nguyễn Quang Diệu. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán - Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã luôn quan tâm và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới bố mẹ, anh chị và những người thân yêu trong gia đình cũng như những bạn bè thân thiết của tôi đã luôn động viên, quan tâm giúp đỡ tôi vượt qua những khó khăn và khuyến khích tôi học tập.

Mục lục

Mở đầu

Định lí cổ điển Bernstein-Walsh cho ta tốc độ xấp xỉ một hàm chỉnh hình bởi các đa thức trên một lân cận của một tập compact với phần bù liên thông trong $\mathbb{C}$. Định lí này đã được mở rộng trong trường hợp nhiều biến bởi Siciak. Trong đó khái niệm phần bù liên thông trong $\mathbb{C}$ được thay bằng khái niệm "lồi đa thức" trong $\mathbb{C}^{\alpha}$. Mục đích của đề tài là nghiên cứu một dạng của định lí xấp xỉ Siciak nhưng lần này bởi các đa thức mà bậc được tính theo bậc Euclid hoặc tổng quát hơn chúng ta sẽ nghiên cứu hàm cực trị Siciak đối với cách xác định bậc đa thức mới này. Cụ thể như sau, nếu $P \subset [0, \infty)^d$ là tập lồi, compact với phần trong khác rỗng thì ta đặt

$$Poly(nP) := \{p(z) = \sum_{J \in nP \cap (\mathbb{Z}^+)^d} c_J z^J : c_J \in \mathbb{C}\}$$

Khi $P = \{(x_1, ...x_d) : x_1, ...x_d \geq 0, x_1 + ... + x_d \leq 1\}$ thì $Poly(nP) = P_n$ không gian con các đa thức với bậc $\leq n$. Hàm cực trị Siciak của (P, E) được định nghĩa bởi

$$V_{P,E}(z) := \sup\{u(z) : u \in PSH(\mathbb{C}^d), u|_E \leq 0, u \leq \sup \log |z^j| + C\}.$$

Ta sẽ tính toán tường minh hàm cực trị của Siciak kiểu này và ứng dụng vào việc xấp xỉ các hàm chỉnh hình vào hàm hữu tỉ bởi các đa thức trong $Poly(nP)$.

Chúng ta sẽ trình bày lại một số kết quả cơ bản trong các bài báo [2] và [3] của T.Bloom, L.Bos, N.Levenberg, S.Ma'u và F.Piazzon. Nội dung chính là những công thức tường minh của hàm cực trị Siciak cho lớp đa thức $Poly(nP)$ và ứng dụng của hàm này vào việc đánh giá tốc độ xấp xỉ hàm chỉnh hình bởi những đa thức trong $Poly(nP)$.

Luận văn được chia thành 2 chương. Chương 1 trình bày các kiến thức về hàm đa điều hòa dưới, hàm cực trị Siciak. Chương 2 trình bày về hàm cực trị kết hợp với vật thể lồi, ứng dụng vào xấp xỉ hàm chỉnh hình.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Các kiến thức chuẩn bị lấy trong [1]

1.1 Hàm đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1. *Giả sử* $D \subset \mathbb{C}^n$ *là tập mở,* $u : D \to [-\infty, +\infty)$ *là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên mọi thành phần liên thông của* D*. Hàm* u *gọi là đa điều hòa dưới trên* D *(viết* $u \in PSH(D)$*) nếu với mọi* $a \in D$ *và* $b \in \mathbb{C}^n$*, hàm* $\lambda \longmapsto u(a + \lambda b)$ *là điều hòa dưới hoặc bằng* $-\infty$ *trên mọi thành phần liên thông của tập* $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in D\}$*.*

Định lý 1.1. *Giả sử* $u : D \to [-\infty, +\infty)$ *là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên mọi thành phần liên thông của* $D \subset \mathbb{C}^n$*. Khi đó* $u \in PSH(D)$*khi và chỉ khi với mọi* $a \in D, b \in \mathbb{C}^n$ *sao cho*

$$\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset D.$$

ta có

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta := l(u, a, b).$$

Định lý 1.2. *Giả sử* $D \subset \mathbb{C}^n$ *là tập mở và* $u \in C^2(D)$. *Khi đó* $u \in PSH(D)$ *khi và chỉ khi Hessian* $H_u(z) = (\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k})$ *của* u *tại* z *xác định dương, nghĩa là với mọi* $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$H_u(z)(w, w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k \geq 0.$$

Định lý 1.3. *Giả sử* $D \in \mathbb{C}^n$ *là tập mở và* $u \in PSH(D)$. *Khi đó với mọi* $b = (b_1, b_2, ...b_n) \in \mathbb{C}^n$ *ta có*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) b_j \overline{b}_k \geq 0$$

tại mọi $z \in D$ *theo nghĩa suy rộng, nghĩa là với mọi* $\varphi \in C_0^\infty(D), \varphi \geq 0$

$$\int_D u(z) < \mathcal{L}\varphi(z)b, b > d\lambda(z) \geq 0$$

ở đó $< \mathcal{L}\varphi(z)b, b) >= \sum_{j,k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) b_j \overline{b}_k$ *là dạng Levi của* φ *tại* z. *Ngược lại, nếu* $v \in L^1_{loc}(D)$ *sao cho với mọi* $z \in D$, *mọi* $b = (b_1, b_2, ...b_n)$ $\in \mathbb{C}^n$

$$H_v(z)(b, b) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) b_j \overline{b}_k \geq 0$$

Theo nghĩa suy rộng thì hàm $u = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(v * \chi_\varepsilon)$ *là hàm đa điều hòa dưới trên* D *và bằng hầu khắp nơi trên* D.

Định lý 1.4. *Giả sử* D *là tập mở trong* $\mathbb{C}^n$.
(i) Nếu $u, v \in PSH(D)$ *thì* $\max\{u, v\} \in PSH(D)$ *và nếu* $\alpha, \beta \geq 0$ *thì* $\alpha u + \beta v \in PSH(D)$. *Nghĩa là* $PHS(D)$ *là nón lồi.*
(ii) Nếu dãy $\{u_j\}_{j \geq 1} \subset PSH(D)$ *là dãy giảm thì* $u = \lim u_j$ *hoặc là hàm đa điều hòa dưới trên* D *hoặc* $\equiv -\infty$.
(iii) Nếu $\{u_j\} \subset PSH(D)$ *là dãy hội tụ đều trên mọi tập compact của* D *tới hàm* $u : D \to \mathbb{R}$ *thì* $u \in PSH(D)$.
(iv) Giả sử $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset PSH(D)$ *sao cho* $u = \sup\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó chính quy hóa nửa liên tục trên* $u^* \in PSH(D)$.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in PSH(D), u \neq const$. Khi đó u không đạt cực đại toàn thể trên D. Hơn nữa nếu D là bị chặn thì với mọi $z \in D$ ta có*

$$u(z) < \sup_{w \in \partial D} \{\limsup_{D \ni z \to w} u(z)\}$$

Định lý 1.5. *Giả sử $f : D \to D'$ là ánh xạ chỉnh hình riêng giữa hai miền trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in PSH(D)$. Khi đó hàm*

$$v(z) = \max\{u(w) : w \in f^{-1}(z)\}, z \in D'$$

là hàm đa điều hòa dưới trên D'.

Bổ đề 1.1. *Giả sử $\{U_j\}_{j \geq 1} \subset PSH(D)$ là bị chặn trên đều địa phương trong tập mở $D \Subset \mathbb{C}^n$. Giả sử với mỗi $z \in D$*

$$\limsup_{j \to \infty} u_j(z) \leq M, \ M \text{ là hằng số.}$$

Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $K \Subset D$ là tập compact, tồn tại j_0 sao cho $\forall j \geq j_0$ ta có $\sup\limits_{z \in K} u_j(z) \leq M + \varepsilon$.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử $D \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở, $\omega \Subset D$ là tập con mở thực sự, khác rỗng của D. Giả sử $u \in PSH(D), v \in PSH(\omega)$ và $\limsup_{x \to y} v(x) \leq v(y)$ với mọi $y \in \partial\omega \cap D$. Khi đó*

$$w = \begin{cases} \max\{u, v\} & \text{trong } \omega \\ u & \text{trong } D \backslash \omega \end{cases}$$

1.2 Hàm cực trị Siciak

Ứng dụng của hàm cực trị Siciak nằm ở bất đẳng thức sau:
Giả sử P là đa thức trên $\mathbb{C}^n$ và $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$ là hình cầu tâm a bán kính r trong $\mathbb{C}^n$. Hàm $u(z) = \frac{1}{\deg P} \log \frac{|P(z)|}{||P||_{\overline{\mathbb{B}}(a,r)}} \in \mathcal{L}$ và $u|_{\overline{\mathbb{B}}(a,r)} \leq 0$. Ta có:

$$\frac{1}{\deg P} \log \frac{|P(z)|}{||P||_{\overline{\mathbb{B}}(a,r)}} \leq \max\left(0, \log \frac{||z-a||}{r}\right) \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Do đó ta có bất đẳng thức sau mà được gọi là bất đẳng thức Bernstein-Walsh:

$$|P(z)| \leq ||P||_{\overline{\mathbb{B}}(a,r)} \left[\max\left(1, \frac{||z-a||}{r}\right)\right]^{\deg P}.$$